Тема: Подобие тел. Отношения площадей поверхностей и объемов подобных тел.

Цели: Определение понятия подобных тел, отношения площадей поверхностей и объемов подобных тел, продолжение формирования навыков и умений применения формул объемов при решении задач.

Теоретический материал

Объем тела – это положительная величина той части пространства , которую занимает геометрическое тело.

Объемы равных тел равны.

Если тело разбито на несколько тел, не имеющих общих внутренних точек, то его объем равен сумме объемов *этих* тел.

Отношение объемов подобных тел равно *кубу* коэффициента подобия.

Правило. Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра основания и высоты

$S_{бок} = p \cdot h$, где $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности;

p – периметр основания призмы (многоугольника, лежащего в основании);

h – высота призмы (для прямоугольной — это длина бокового ребра призмы).

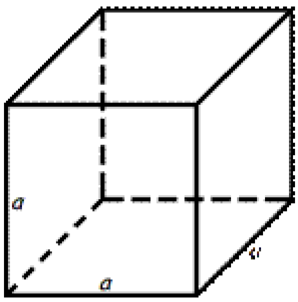
Правило. Объем прямой призмы равен произведению площади основания на длины бокового ребра

$V = S_{бок} \cdot l$,

где V – объем призмы;

$S_{бок}$ – площадь основания призмы (многоугольника, лежащего в основании призмы);

l – длина бокового ребра призмы.



Объем куба

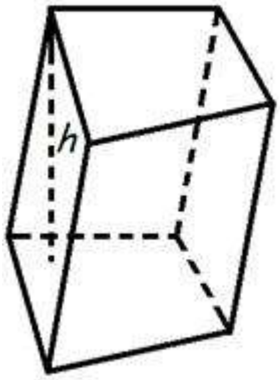
Объем куба равен кубу длины его грани.

Формула объема куба

$V = a^3$,

где V - объем куба, a – длина грани куба.

Объем призмы



Объем призмы равен произведению площади основания призмы, на высоту.

Формула объема призмы

$V = S_о \cdot h$,

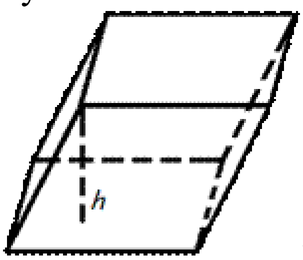
где V – объем призмы,

$S_о$ – площадь основания призмы,

h – высота призмы.

Объем параллелепипеда

Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.



Формула объема параллелепипеда

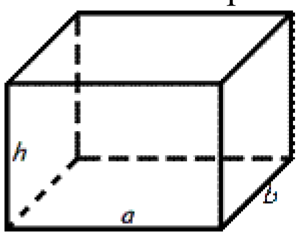
$V = S_о \cdot h$, где V – объем параллелепипеда,

$S_о$ – площадь основания,

h – длина высоты.

Объем прямоугольного параллелепипеда

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его



длины, ширины и высоты.

Формула объема прямоугольного параллелепипеда

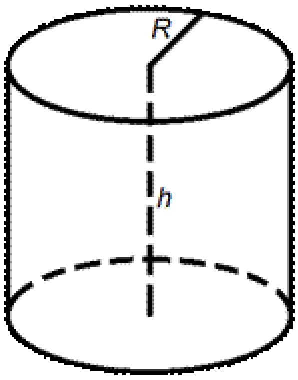
$V = a \cdot b \cdot h$,

где V – объем прямоугольного параллелепипеда,

a – длина, b – ширина, h – высота.

Объем цилиндра

Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.



Формулы объема цилиндра

$V = \pi \cdot R^2 \cdot h$,

$V = S_0 \cdot h$, где V – объем цилиндра,

S_0 – площадь основания цилиндра,

R – радиус цилиндра,

h – высота цилиндра,

π = 3.141592

Объем частей шара

Шаровым сегментом называется часть шара, отсеченная от него плоскостью. Если OP – радиус шара, перпендикулярный отсекающей плоскости, то точку P назовем в этом случае полюсом шара. Высотой шарового сегмента называется отрезок PO_1, соединяющий полюс шара с центром основания шарового сегмента.

Шаровой сектор состоит из шарового сегмента и конуса. Поэтому его объем является суммой объемов шарового сегмента V_1 и конуса $V_2 : V = V_1 + V_2$. Высота P_1O_1 шарового сегмента является также высотой и шарового сектора. Имеем

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H),$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2(R - H),$$

где r – радиус конуса. Пусть P_1, P_2 – полюса шара, $O_1A = r$. Из прямоугольного треугольника P_1AP_2 находим $r^2 = H(2R - H)$, следовательно,

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi H(2R - H)(R - H)$$

Объем шарового сектора

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H) + \frac{1}{3}\pi H(2R - H)(R - H) = \frac{2}{3}$$

Подобность многогранников.

Два многогранника называются подобными, если они имеют соответственно равные многогранные углы и соответственно подобные грани.

Соответственные элементы подобных многогранников называются ***сходственными***. У подобных многогранников двугранные углы равны и одинаково расположены; сходственные рёбра пропорциональны.

Если в пирамиде проведём секущую площадь параллельно основанию, то она отсечёт от неё другую пирамиду, подобную данной.

Поверхности подобных многогранников относятся, как квадраты сходственных линейных элементов многогранников.

Объёмы подобных многогранников относятся как кубы сходственных линейных элементов этих многогранников.

Квадраты объёмов подобных многогранников относятся как кубы площадей сходственных граней.

Подобные цилиндры и конусы.

Два цилиндра, конуса или усечённых конуса называются подобными, если подобны их осевые сечения.

Боковые и полные поверхности подобных цилиндров, конусов и усечённых конусов относятся, как квадраты их сходственных линейных элементов. (радиусов оснований, высот, образующих).

Объёмы подобных тел.

Пусть T и T' – два простых подобных тела. Это означает, что существует преобразования подобия, при котором тело T переходить в тело T'. Обозначим через k коэффициент подобия.

Разобьём тело T на треугольные пирамиды

$P_1, P_2, \ldots, P_n \ldots$

Преобразования подобия, которое переводит тело T в тело T' переводит пирамиды

$P_1, P_2, \ldots, P_n$ в пирамиды $P_1', P_2', \ldots, P_n'$.

Эти пирамиды составляют тело T' и поэтому объём тела T' равен сумме объёмов пирамид

$P_1', P_2', \ldots, P_n'$.

Так как пирамиды P_1' и P_1 подобны и коэффициент подобия равен k, то и отношение их высот равно k, а отношение площадей их оснований равно k^2. Поэтому, отношение объёмов пирамид равно k^3. Так как тело T состоит из пирамид P_1, а тело T' состоит из пирамид P_1', то отношение объёмов тел T' и T тоже равно k^3.

Число k – коэффициент подобия – равен отношению расстояний между любыми двумя соответствующими парами точек при преобразования подобия. Поэтому, это число равно отношению любых двух соответствующих линейных размеров тел T' и T. Таким образом, мы приходим к следующему выводу:

Объёмы двух подобных тел относятся как кубы их соответствующих линейных размеров.

Квадраты объёмов подобных тел относятся, как кубы площадей соответствующих граней.

Объёмы подобных цилиндров, конусов и усечённых конусов относятся, как кубы их соответствующих линейных элементов (радиусов оснований, высот, образующих).

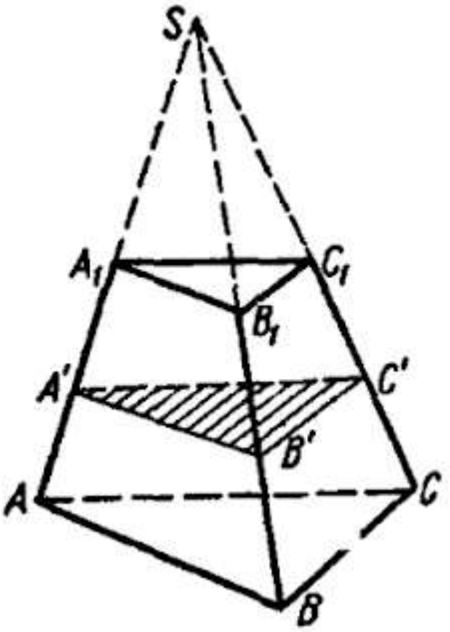
Объёмы шаров относятся, как кубы их радиусов или диаметров.

ЗАДАЧА:

Площади оснований усечённой пирамиды S_1 *и* S_2*, а её объём равен* V*. Определить объём полной пирамиды.*

РЕШЕНИЕ:

Пусть $S_1 > S_2$*. Обозначим объём полной пирамиды через* V_1*, а объём пирамиды, дополняющей данную усечённую пирамиду до полной, через* V_2



Тогда:

$$\frac{V_2^2}{V_1^2} = \frac{S_2^3}{S_1^3},$$

или

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{S_2^{\frac{3}{2}}}{S_1^{\frac{3}{2}}}.$$

Составляя производную пропорцию, получим:

$$\frac{V_1 - V_2}{V_1} = \frac{S_1^{\frac{3}{2}} - S_2^{\frac{3}{2}}}{S_1^{\frac{3}{2}}}.$$

С учётом $V_1 - V_2 = V$*, находим*:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{S_1^{\frac{3}{2}} - S_2^{\frac{3}{2}}}{S_1^{\frac{3}{2}}},$$

откуда:

$$V_1 = \frac{VS_1^{\frac{3}{2}}}{S_1^{\frac{3}{2}} - S_2^{\frac{3}{2}}}.$$

ОТВЕТ:

$$V_1 = \frac{V\sqrt{S_1^3}}{\sqrt{S_1^3} - \sqrt{S_2^3}} \text{ (куб. од.).}$$

ЗАДАЧА:

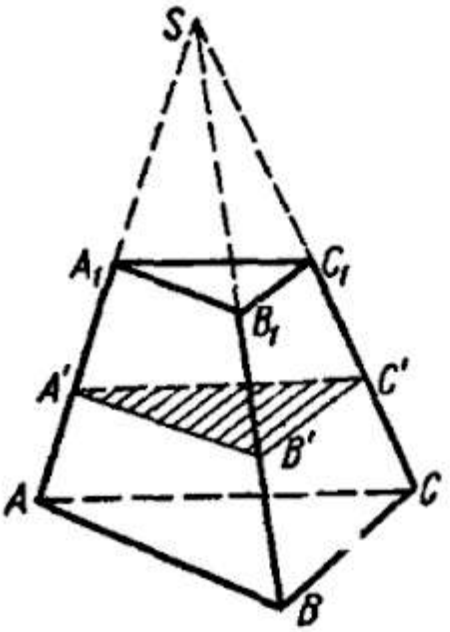
Площади оснований усечённой пирамиды равны a^2 *и* b^2. *Найти площадь сечения, которое параллельно площадям оснований усечённой пирамиды и делящего её объём пополам.*

РЕШЕНИЕ:

В усечённой пирамиде AC_1 (*для простоты рисунка рассматривается треугольная пирамида*) *дано*:

$$S_{ABC} = a^2,$$

$$S_{A_1B_1C_1} = b^2.$$



Необходимо найти площадь сечения $A'B'C'$ (*пл.* $ABC \parallel$ *пл.* $A'B'C'$), *которое делит усечённую пирамиду на равновеликие по объёму части.*

Дополним усечённую пирамиду до полной. Пирамиды

$SABC$, $SA'B'C'$, $SA_1B_1C_1$ – *подобные.*

Обозначим площадь искомого сечения $A'B'C'$ *через* x^2, *а объёмы пирамид*

$SABC$, $SA'B'C'$ *и* $SA_1B_1C_1$

соответственно V_a, V_x, V_b. *Тогда*:

$$\frac{V_a^2}{a^6} = \frac{V_x^2}{x^6} = \frac{V_b^2}{b^6},$$

или

$$\frac{V_a}{a^3} = \frac{V_x}{x^3} = \frac{V_b}{b^3} = t,$$

где t – некоторое число, которое обозначает величину этих отношений. Тогда:

$V_a = a^3 t,\ V_x = x^3 t,\ V_b = b^3 t.$

По условию задачи:

$V_a - V_x = V_x - V_b,$

или

$a^3 t - x^3 t = x^3 t - b^3 t,$

откуда:

$2x^3 = a^3 + b^3.$

поэтому,

$$x^2 = \left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

ОТВЕТ:

$$S_{A'B'C'} = \sqrt[3]{\left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)^2}\ (кв.\ од.).$$

Практическая часть:

1. Высота конуса равна *5 см*. На расстоянии *2 см* от вершины его пересекает плоскость, параллельная основанию. Найдите объём исходного конуса, если объём меньшего конуса, отсекаемого от исходного, равен *24 см*^{3}.

2. Объём конуса равен *27*. На высоте конуса лежит точка и делит её в отношении 2 : 1 считая от вершины. Через точку проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объём меньшего конуса.

3. В усечённой пирамиде соответственные стороны оснований относятся как 2 : 5. В каком отношении делится её объём плоскостью, проходящей через середину высоты этой пирамида параллельно основаниям ?

4. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $^1/_2$ высоты. Объём жидкости равен *54 мл*. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд ?

5. Объём конуса равен *16*. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объём меньшего конуса.